Tentamen Oriëntatie Wiskunde
21-X-2009, 13.00–16.00

1. Wat is de inverse van 113 mod 1000?

2. Leg uit waarom $7|(2^{1000}+5)$.

3. Stel dat n, g gehele getallen zijn, en $g > 0$. Bewijs de volgende stelling: Er bestaan gehele a, b met $ab = n$ en $\text{ggd}(a, b) = g \iff g^2|n$.

4. We beschouwen een smeltende sneeuwbal. De massa-dichtheid van de sneewbal is bij aanname constant. We noemen de massadichtheid ρ. We nemen aan dat een sneeuwbal een perfekte bol is met straal $r(t)$ voor alle tijden t, en dat de afname van de massa van de sneeuwbal evenredig is om het oppervlak van de sneeuwbal. Op $t = 0$ geldt $r = 1$. Bereken r als functie van t.

5. De details van de sterkte van de eerste atoombom in 1945 waren 'uiterst geheim' tot in de jaren zestig. Echter, de Britse natuurkundige G.I. Taylor wist het 'geheim' al veel eerder te ontrafelen door goed naar een film van de explosie te kijken en door een dimensie-analyse toe te passen. Zijn argument gaat als volgt: de film toont een expanderende paddestoel. Als we het steeltje weglaten, en het bovendeel van de paddestoel vervangen door een bol met straal R, krijgen we het model

$$R = f(t, E, \rho)$$

waarbij t de tijd is (gemeten vanaf het begin van de explosie), E de energie van de explosie (de gezochte grootheid), en ρ de dichtheid van de lucht op $t = 0$. In termen van de fundamentele dimensies lengte L, tijd T en massa M wordt de dimensie van E gegeven door $[E] = L^2MT^{-2}$.

   (a) Bepaal de dimensie van R, t en ρ.

   (b) Hoe luidt het Buckingham Pi Theorema?

   (c) Pas het Buckingham Pi Theorema toe op dit model.

   (d) Laat zien dat een dimensie-analyse het volgende model oplevert:

$$R = C\left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{1/5}$$

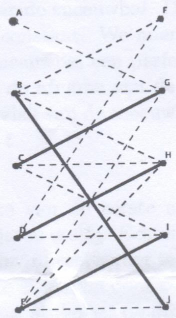
   waarbij C een constante is.

Door goed naar de film te kijken vond Taylor

$$\log R = 0.4058 \log t + 1.5593$$

Uit een andere, lichtere explosie haalde hij $C \approx 1$. Dus voor $\rho \approx 1\ kg/m^3$ volgt $E \approx 8\,10^{13}$J (is ongeveer 20 kiloton TNT), en dat was 'uiterst geheim'...

6. Bepaal in de onderstande graaf een verbeterend pad van A naar F, en bepaal middels deze een perfecte matching in de graaf.



7. De Prüfer-code van een boom met wortel 0 is 4 4 1 7 7 5 7. Reconstrueer de extended Prüfer-code en schets de boom.

8. Bewijs de stelling:

Een graaf G is bipartiet $\iff$ G bevat geen oneven cykels.

(Een oneven cykel is een cykel die bestaat uit een oneven aantal takken.)